1. El teorema de la función implícita para dos y tres variables.

Una ecuación con dos incógnitas. Sea $f:(x,y)\in U\subseteq\mathbb{R}^2\to f(x,y)\in\mathbb{R}$ un campo escalar. La ecuación $f(x,y)=0$ representa, habitualmente, una curva en el plano y la cuestión es averiguar si podemos despejar la variable y en función de x para representar la curva de manera explícita mediante la función $y=y(x)$. El ejemplo típico de esta situación es la ecuación de una circunferencia, por ejemplo $x^2+y^2=1$, donde podemos despejar $y=y(x)=\sqrt{1-x^2}$ para describir *parte* de dicha circunferencia. La cuestión es ¿cuándo representa la ecuación $f(x,y)=0$ una curva en el plano y cómo podemos estudiar dicha curva? La respuesta no es siempre positiva como ocurre con $x^2+y^2=1$. Por ejemplo, el conjunto de puntos que verifica la ecuación $x^2+y^2+1=0$ es vacío, es decir, no hay puntos (x,y) del plano que verifiquen esta ecuación y, por tanto, no representa ninguna curva. El resultado que vamos a estudiar a continuación proporciona unas condiciones bastante generales bajo las que se puede garantizar que alrededor de un determinado punto la ecuación $f(x,y)=0$ es una curva.

TEOREMA (DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA). Sea f una función con derivadas parciales continuas en una región $U\subseteq\mathbb{R}^2$ y sea (x_0,y_0) un punto interior a U tal que $f(x_0,y_0)=0$ y $f_y(x_0,y_0)\neq 0$. Entonces existen un intervalo I, centrado en el punto x_0, y una única función $y:x\in I\subseteq\mathbb{R}\to y(x)\in\mathbb{R}$, derivable con derivada continua en I tal que $y(x_0)=y_0$, que es solución de la ecuación $f(x,y)=0$, es decir, se verifica que $f(x,y(x))=0$ para todo $x\in I$. Además, la derivada de la función y viene dada por $y'(x)=-\dfrac{f_x(x,y(x))}{f_y(x,y(x))}$ para cada punto $x\in I$.

OBSERVACIÓN. (1) En la práctica, sólo se conoce el valor de la función $y(x)$ en el punto x_0. Por tanto, el único valor donde se puede usar la fórmula $y'(x)=-\dfrac{f_x(x,y(x))}{f_y(x,y(x))}$ es en $x=x_0$ obteniéndose, en este caso, que $y'(x_0)=-\dfrac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}$.

(2) El teorema de la función implícita nos dice que la curva de ecuación implícita $f(x,y)=0$ coincide cerca del punto (x_0,y_0) con la gráfica de la función $y=y(x)$. Por otra parte, sabemos que la recta tangente a la curva $y=y(x)$ en el punto (x_0,y_0) viene dada por $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$, ecuación que, en este caso, podemos escribir como $f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$. Observemos que, como ya sabíamos, la diferencial $Df(x_0,y_0)$ es un *vector normal* a la curva definida por $f(x,y)=0$ en el punto (x_0,y_0).

EJEMPLO. Consideremos la ecuación $x^3y^2-3xy+2=0$. Vamos a comprobar que en un entorno del punto $(1,2)$ se puede definir implícitamente la variable y como función de la variable x. Para ello, consideremos la función $f(x,y)=x^3y^2-3xy+2$. Esta función tiene derivadas parciales continuas en $\mathbb{R}^2$ y es claro que $f(1,2)=0$. Además $f_y(x,y)=2x^3y-3x$ y, en particular, $f_y(1,2)=1\neq 0$. Por el teorema anterior se verifica que existen un intervalo I centrado en el punto 1 y una única función $y: x\in I\subseteq\mathbb{R}\to y(x)\in\mathbb{R}$ derivable con derivada continua en I tal que $y(1)=2$ e $y=y(x)$ es solución de la ecuación $f(x,y)=0,$ o sea, $x^3y(x)^2-3xy(x)+2=0$ para cada $x\in I$. Si derivamos en esta expresión con respecto a la variable x obtenemos que

$$3x^2y(x)^2+2x^3y(x)y'(x)-3y(x)-3xy'(x)=0,\quad x\in I.$$

En particular, para $x=1,$ tenemos $3y(1)^2+2y(1)y'(1)-3y(1)-3y'(1)=0.$ Como $y(1)=2$ se obtiene que $y'(1)=-6$ y la ecuación de la recta tangente a la función $y(x)$ en $x=1$ es $y-2=-6(x-1).$

OBSERVACIÓN. 1) El papel de la incógnita que se despeja es intercambiable, o sea, se puede enunciar un teorema similar que nos da condiciones bajo las que podemos despejar x en función de y. Por consiguiente, si $Df(x_0,y_0)\neq(0,0)$ en un punto (x_0,y_0) tal que $f(x_0,y_0)=0$, entonces la ecuación $f(x,y)=0$ define implícitamente una curva que pasa por el punto $(x_0,y_0),$ es decir, se puede despejar una de las variables en función de la otra. Veamos qué puede ocurrir si $Df(x_0,y_0)=(0,0).$

a) Puede que no exista *curva*. Por ejemplo, consideremos la función $f(x,y)=x^2+y^2.$

b) Puede que exista *curva* pero no sea *regular* en (x_0,y_0). Por ejemplo, consideremos la función $f(x,y)=x^2-y^3$ y el punto $(x_0,y_0)=(0,0).$

c) Puede perderse la *unicidad* de la función $y=y(x).$ Por ejemplo, consideremos la función $f(x,y)=x^2-y^2$ y el punto $(x_0,y_0)=(0,0).$

2) La regularidad de la función $y=y(x)$ aumenta si suponemos que la función $f(x,y)$ tiene derivadas parciales de orden superior continuas en U. En concreto, si f tiene derivas parciales de orden n continuas en $U,$ entonces la función $y=y(x)$ tiene derivada de orden n y es continua en I.

EJEMPLO. Ahora trabajaremos con la ecuación implícita $x^3-y^3+2xy-x+y=0.$ Veremos que define la variable y como una función $y=y(x)$ de la variable x alrededor del punto $P=(0,1).$ Para ello, consideremos la función $f(x,y)=x^3-y^3+2xy-x+y,$ que tiene derivas parciales continuas en $\mathbb{R}^2$ y $f(0,1)=0.$ Por otro lado, $f_y(x,y)=-3y^2+2y-1.$ En particular, $f_y(0,1)=-2\neq 0.$ Por el teorema de la función implícita, existe un intervalo I centrado 0 y una única función $y: x\in I\subseteq\mathbb{R}\to y(x)\in\mathbb{R}$ derivable con derivada continua, tal que $y(0)=1$ e $y=y(x)$ es solución de la ecuación $f(x,y)=0,$ o sea, $x^3-y(x)^3+2xy(x)-x+y(x)=0$ para cada $x\in I$. Observemos que para $x=0,$ la ecuación $x^3-y^3+2xy-x+y=0$ que define la curva queda $-y^3+y=0$ y tiene tres soluciones, esto es, $y=1,$ $y=0$ e $y=-1.$ Por eso, en el enunciado del teorema es imprescindible especificar el valor y_0 al que nos referimos. Para cada uno de estos valores estaremos considerando *trozos diferentes de la curva*. En este ejemplo concreto hay tres funciones que describen la curva en un entorno del punto $x_0=0$: una de ellas $y=y_1(x)$ es tal que $y_1(0)=1,$ otra $y=y_2(x)$ es tal que $y_2(0)=0$ y la tercera $y=y_3(x)$ es tal que $y_3(0)=-1.$ Nosotros en este ejemplo estamos estudiando la función $y=y_1(x).$

Puesto que la función $f(x,y)=x^3-y^3+2xy-x+y$ tiene derivadas parciales de cualquier orden, la función $y = y(x)$ tiene derivadas de cualquier orden. En particular, podemos calcular el polinomio de Maclaurin de orden 3 de dicha función $y = y(x)$. Para ello necesitamos conocer las tres primeras derivadas de dicha función en el punto 0. Para ello derivamos con respecto a la variable x en la anterior ecuación, obteniendo: $3x^2 - 3y(x)^2 y'(x) + 2y(x) + 2xy'(x) - 1 + y'(x) = 0$. Tomando $x = 0$ en la ecuación obtenemos que $-3y(0)^2 y'(0) + 2y(0) - 1 + y'(0) = 0$. Teniendo en cuenta que $y(0) = 1$, se tiene que $y'(0) = \frac{1}{2}$. Si de nuevo derivamos con respecto a la variable x obtenemos $6x - 6y(x)y'(x)^2 - 3y(x)^2 y''(x) + 4y'(x) + 2xy''(x) + y''(x) = 0$. Tomamos de nuevo $x = 0$ y obtenemos que $-6y(0)y'(0)^2 - 3y(0)^2 y''(0) + 4y'(0) + y''(0) = 0$. Despejando se tiene $y''(0) = \frac{1}{4}$. Finalmente, para la tercera derivada obtenemos que

$$6 - 6y'(x)^3 - 18y(x)y'(x)y''(x) - 3y(x)^2 y'''(x) + 6y''(x) + 2xy'''(x) + y'''(x) = 0.$$

En particular, para $x = 0$ obtenemos que

$$6 - 6y'(0)^3 - 18y(0)y'(0)y''(0) - 3y(0)^2 y'''(0) + 6y''(0) + y'''(0) = 0.$$

Es decir, $y'''(0) = \frac{9}{4}$. De esta forma, el polinomio de Maclaurin de la función $y = y(x)$ de grado tres es $p(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{1}{2}y''(0)x^2 + \frac{1}{6}y'''(0)x^3 = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{8}x^3$.

Una ecuación con tres incógnitas. Sea $F:(x,y,z) \in U \subseteq \mathbb{R}^3 \to F(x,y,z) \in \mathbb{R}$ un campo escalar. La ecuación $F(x,y,z) = 0$ representa, habitualmente, una superficie en el espacio y la cuestión ahora es averiguar si podemos despejar la variable z en función de x e y para poder representar la superficie de manera explícita mediante una ecuación del tipo $z = z(x,y)$. El ejemplo típico de esta situación es la ecuación de una esfera, por ejemplo, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, donde podemos despejar la variable z y obtener $z = z(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ para describir el hemisferio norte de dicha esfera.

TEOREMA (DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA). Sea F una función con derivadas parciales continuas en una región $U \subseteq \mathbb{R}^3$ y sea (x_0, y_0, z_0) un punto interior a U tal que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ y $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Entonces existen un disco $D \subseteq \mathbb{R}^2$, centrado en el punto (x_0, y_0), y una única función $z:(x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \to z(x,y) \in \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas en D tal que $z_0 = z(x_0, y_0)$ y $z = z(x,y)$ que es solución de la ecuación $F(x,y,z) = 0$, es decir, se verifica que $F(x,y,z(x,y)) = 0$ para todo $(x,y) \in D$. Además, las derivadas parciales de la función z vienen dadas por $z_x(x,y) = -\frac{F_x(x,y,z(x,y))}{F_z(x,y,z(x,y))}$ y $z_y(x,y) = -\frac{F_y(x,y,z(x,y))}{F_z(x,y,z(x,y))}$, para cada $(x,y) \in D$.

OBSERVACIÓN. Este teorema nos dice que la superficie de ecuación $F(x,y,z) = 0$ coincide, cerca de (x_0, y_0, z_0), con la gráfica de la función $z(x,y)$. Sabemos que la ecuación del plano tangente a dicha superficie en el punto (x_0, y_0, z_0) es $z - z_0 = z_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ que, en este caso, podemos escribir como $F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$ Observemos, en particular, que la diferencial $DF(x_0,y_0,z_0)$ es un vector normal a la superficie de ecuación $F(x,y,z)=0$ en el punto (x_0,y_0,z_0).

EJEMPLO. Vamos a comprobar que en la ecuación $x^3z-z^3yx=0$ la variable z se puede expresar como una función de las variables x e y alrededor del punto $(1,1,1)$. Para ello, consideremos la función $F(x,y,z)=x^3z-z^3yx,$ que tiene derivadas parciales continuas en $\mathbb{R}^3$ y $F(1,1,1)=0.$ Además, $F_z(x,y,z)=x^3-3z^2yx.$ En particular, $F_z(1,1,1)=-2\neq 0.$ Por el teorema anterior existen un disco $D\subseteq\mathbb{R}^2$ centrado en el punto $(1,1)$ y una única función $z:(x,y)\in D\subseteq\mathbb{R}^2\to z(x,y)\in\mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas en D verificando que $z(1,1)=1$ que es solución de la ecuación $F(x,y,z)=0,$ o sea, $x^3z(x,y)-z(x,y)^3yx=0$ para cada $(x,y)\in D.$ Ahora calculamos el plano tangente a la gráfica de la función $z(x,y)$ en el punto $(1,1).$ Comenzamos calculando las derivadas parciales de $z(x,y)$. Derivamos con respecto a x e y en la igualdad $x^3z(x,y)-z(x,y)^3yx=0$ obteniendo que

$$\begin{cases} 3x^2z(x,y)+x^3z_x(x,y)-3z(x,y)^2z_x(x,y)yx-z(x,y)^3y=0, \\ \qquad\qquad x^3z_y(x,y)-3z(x,y)^2z_y(x,y)yx-z(x,y)^3x=0. \end{cases}$$

En particular, tomando $x=y=1$ y teniendo en cuenta que $z(1,1)=1$ se verifica que $z_x(1,1)=1$ y $z_y(1,1)=-\dfrac{1}{2}.$ De esta forma el plano tangente viene dado por $z-1=(x-1)-\dfrac{1}{2}(y-1).$

OBSERVACIÓN. El papel de la incógnita que se despeja es intercambiable, o sea, se puede enunciar un teorema que nos da condiciones bajo las que podemos despejar $x=x(y,z)$ o $y=y(x,z).$ Por consiguiente, si la diferencial $DF(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0)$ y $F(x_0,y_0,z_0)=0$, entonces la ecuación $F(x,y,z)=0$ define implícitamente una superficie que pasa por el punto $(x_0,y_0,z_0),$ es decir, se puede despejar, al menos, una de las variables en función de las otras.

OBSERVACIÓN (DERIVADAS CÍCLICAS). Sea F una función con derivadas parciales continuas en una región $U\subseteq\mathbb{R}^3$ y sea (x_0,y_0,z_0) un punto interior a U tal que $F(x_0,y_0,z_0)=0$ y $F_x(x_0,y_0,z_0)\neq 0,$ $F_y(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ y $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0.$ Entonces podemos despejar las tres variables en función de las dos restantes, es decir, $x=x(y,z)$ en un disco D_1 centrado en $(y_0,z_0),$ $y=y(x,z)$ en un disco D_2 centrado en (x_0,z_0) y $z=z(x,y)$ en un disco D_3 centrado en $(x_0,y_0).$ Sabemos que las derivas parciales verifican:

$$x_y(y_0,z_0)=-\frac{F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_x(x_0,y_0,z_0)},\quad y_z(x_0,z_0)=-\frac{F_z(x_0,y_0,z_0)}{F_y(x_0,y_0,z_0)},\quad z_x(x_0,y_0)=-\frac{F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

Por tanto, $x_y(y_0,z_0)\cdot y_z(x_0,z_0)\cdot z_x(x_0,y_0)=-1.$ Esta igualdad es conocida en Termodinámica como el teorema de las derivadas cíclicas.

Dos ecuaciones con tres incógnitas. Supongamos que dos superficies, con ecuaciones implícitas $F(x,y,z)=0$ y $G(x,y,z)=0$, se cortan a lo largo de una curva C de la que deseamos conocer unas ecuaciones paramétricas. Una idea sería despejar en el sistema $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0, \end{cases}$ dos de las variables en función de la tercera, que usaríamos como parámetro. Por ejemplo, despejar y y z en función de x. Sin embargo, esto no es siempre posible. El siguiente resultado nos da condiciones bajo las que se puede *despejar* y, por consiguiente, asegurar que el conjunto de puntos que verifican las dos ecuaciones $F(x,y,z)=0$ y $G(x,y,z)=0$ es una curva en el espacio.

TEOREMA (DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA). Sean F y G dos funciones con derivadas parciales continuas en $U \subseteq \mathbb{R}^3$ y sea (x_0,y_0,z_0) un punto interior a U tal que $F(x_0,y_0,z_0)=G(x_0,y_0,z_0)=0$ y $\det\begin{bmatrix} F_y(x_0,y_0,z_0) & F_z(x_0,y_0,z_0) \\ G_y(x_0,y_0,z_0) & G_z(x_0,y_0,z_0) \end{bmatrix} \neq 0$. Entonces existe un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ centrado en el punto x_0 y existen dos únicas funciones escalares $y=y(x)$ y $z=z(x)$ con derivadas continuas en I tales que $y(x_0)=y_0$, $z(x_0)=z_0$ y además $(x,y(x),z(x))$ es solución del sistema $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0, \end{cases}$ es decir, $F(x,y(x),z(x))=G(x,y(x),z(x))=0$ para cada $x\in I$. Sus derivadas $y'(x)$ y $z'(x)$ vienen dadas, para cada $x \in I$, por la solución única del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} F_y(x,y(x),z(x))y'(x)+F_z(x,y(x),z(x))z'(x)=-F_x(x,y(x),z(x)), \\ G_y(x,y(x),z(x))y'(x)+G_z(x,y(x),z(x))z'(x)=-G_x(x,y(x),z(x)). \end{cases}$$

En particular, $y'(x_0)$ y $z'(x_0)$ son la solución única del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} F_y(x_0,y_0,z_0)y'(x_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)z'(x_0)=-F_x(x_0,y_0,z_0), \\ G_y(x_0,y_0,z_0)y'(x_0)+G_z(x_0,y_0,z_0)z'(x_0)=-G_x(x_0,y_0,z_0). \end{cases}$$

OBSERVACIÓN. Bajo las condiciones del teorema, el trozo de curva C cerca de (x_0,y_0,z_0) podemos parametrizarlo, usando la variable x como parámetro, mediante la siguiente función vectorial $C: x\in I\subseteq\mathbb{R}\to C(x)=(x,y(x),z(x))\in\mathbb{R}^3$. Entonces un vector tangente a la curva C en un punto $(x,y(x),z(x))$ es la derivada $C'(x)=(1,y'(x),z'(x))$ que, como se deduce del sistema de ecuaciones que definen las derivadas, es ortogonal tanto a $DF(x,y(x),z(x))$ como a $DG(x,y(x),z(x))$. Por tanto, el producto vectorial $DF(x,y(x),z(x))\times DG(x,y(x),z(x))$ es también un vector director de la recta tangente a la curva en ese punto.

EJEMPLO. Las superficies de ecuaciones implícitas $x^2+y^2+z^2=1$ y $x^2+y^2-y=0$ se cortan a lo largo de una curva C en $\mathbb{R}^3$. Vamos a comprobar que alrededor del punto $(0,0,1)$ esta curva tiene una parametrización de la forma $C(x)=(x,y(x),z(x))$ y vamos a calcular la ecuación de la recta tangente a dicha curva en este punto. Consideremos las funciones $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$ y $G(x,y,z)=x^2+y^2-y$, que definen las superficies. Ambas tienen derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^3$. Además se verifica que $F(0,0,1)=0$, $G(0,0,1)=0$ y $\det\begin{bmatrix} F_y(0,0,1) & F_z(0,0,1) \\ G_y(0,0,1) & G_z(0,0,1)\end{bmatrix}=2$. Por el teorema anterior, existen un intervalo $I\subseteq\mathbb{R}$ centrado en el punto 0 y dos únicas funciones escalares y y z derivables en I tales que $y(0)=0$, $z(0)=1$ y $(x,y(x),z(x))$ es solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0, \end{cases}$ es decir, $\begin{cases} x^2+y(x)^2+z(x)^2=1, \\ x^2+y(x)^2-y(x)=0, \end{cases}$ para cada $x\in I$. Observemos que la primera de estas ecuaciones lo que afirma es que la imagen de la parametrización está contenida en la esfera y la segunda asegura que también está contenida en el cilindro. Si derivamos en las dos ecuaciones que verifican las funciones $y=y(x)$ y $z=z(x)$ con respecto a la variable independiente x obtenemos que $2x+2y(x)y'(x)+2z(x)z'(x)=0$ y también que $2x+2y(x)-y'(x)=0$. En particular, para $x=0$ y teniendo en cuenta que $y(0)=0$ y $z(0)=1$, tenemos que $z'(0)=0$ e $y'(0)=0$. Es decir, un vector tangente a la curva es $(1,0,0)$. De esta forma las ecuaciones paramétricas de la recta tangente son $(x,y,z)=(0,0,1)+\lambda(1,0,0)$.

En el caso del punto $(0,1,0)$ se verifica que $F(0,1,0)=0$ y $G(0,1,0)=0$. Además tenemos que se verifica que $DF(0,1,0)=(0,2,0)$ y $DG(0,1,0)=(0,1,0)$, siendo estos dos vectores linealmente dependientes. No es posible, por tanto, aplicar el teorema anterior. Sin embargo, esto no quiere decir que los puntos de la intersección de estas dos superficies no determinen una curva; simplemente que esta curva no se puede parametrizar de la forma que se indica en la observación posterior al teorema.

OBSERVACIÓN. El papel de las incógnitas que se despejan es intercambiable, o sea, se puede enunciar un teorema que nos da condiciones bajo las que podemos despejar $x=x(z)$ e $y=y(z)$ o despejar $x=x(y)$ y $z=z(y)$.

EJERCICIO 1. Consideremos la ecuación $x^2+y^3x+1=0$. Comprueba que en cada punto (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2$ que verifica dicha ecuación se puede definir o bien x como función implícita de y alrededor de (x_0,y_0) o bien y como función implícita de x alrededor de (x_0,y_0). ¿Define dicha ecuación a x como función implícita de y alrededor de $\left(-1,\sqrt[3]{2}\right)$? ¿Define dicha ecuación a y como función implícita de x alrededor de $\left(-1,\sqrt[3]{2}\right)$? En caso afirmativo, calcula el polinomio de Taylor de grado dos de la función $y(x)$ alrededor del punto $x=-1$.

EJERCICIO 2. Considera la superficie S de ecuación $x^2+y^2+3xz+3yz+x+y=0$.

(1) Prueba que la ecuación anterior define una función diferenciable $z=f(x,y)$ en un entorno del punto $P=(-1,0,0)$.

(2) Calcula la ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto P.

(3) Prueba que en un entorno del punto $(-1,0)$ se tiene que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\dfrac{2}{x+y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$.

EJERCICIO 3. Considera la superficie S de ecuación implícita $x^2+y^2+z^2+4xy+z-1=0$ y el punto $P=(0,-1,0)$ de S.

(1) Comprueba que la ecuación implícita permite definir z como una función de x e y, que denotaremos por $z=z(x,y)$, en un entorno de P.

(2) Determina la dirección según la cual la derivada de z en el punto $(0,-1)$ es máxima y a calcular el valor de dicha derivada direccional.

(3) Determina la ecuación del plano tangente a S en P.

(4) Al cortar la superficie S con el cilindro de ecuación $x^2+y^2=1$ se obtiene una curva C que pasa por P. Calcula unas ecuaciones de la recta tangente a C en el punto P.

EJERCICIO 4. Calcula el polinomio de Taylor de grado dos centrado en el origen de coordenadas de la función $z(x,y)$ definida implícitamente mediante la ecuación $z^3+x^2+(y^2+1)z=0$.

EJERCICIO 5. (1) Comprueba que la ecuación $xz^3-yz=x$ define la variable z como función de las variables cartesianas $z=z(x,y)$ en un entorno del punto $(x_0,y_0,z_0)=(1,0,1)$.

(2) Calcula las derivadas parciales $z_{xx}(1,0)$, $z_{yy}(1,0)$ y $z_{xy}(1,0)$.

(3) Si (r,θ) denotan las coordenadas polares, calcula las derivadas $z_r(r_0,\theta_0)$ y $z_\theta(r_0,\theta_0)$ en el punto $(r_0,\theta_0)=(1,0)$.

EJERCICIO 6. Sea C la curva dada por la intersección de la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=3$ con el cilindro de ecuación $x^2+y^2=2x$. Comprueba que en un entorno del punto $P=(1,1,1)$ se pueden despejar las variables $x=x(z)$ e $y=y(z)$ de la curva como funciones de z y calcula los polinomios de Taylor de orden 2 de las correspondientes funciones $x=x(z)$ e $y=y(z)$ alrededor del punto $z_0=1$.

EJERCICIO 7. Sea C la elipse dada por la intersección del elipsoide $x^2+4y^2+3z^2=16$ con el plano de ecuación $x+y+2z=5$. Comprueba que en un entorno del punto $(0,1,2)$ se pueden despejar las variables $y=y(x)$ y $z=z(x)$ de dicha elipse en función de la variable x. También calcula los correspondientes polinomios de Maclaurin de grado tres de las funciones $y=y(x)$ y $z=z(x)$.