Tema 3. Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

En este tema vamos a considerar las operaciones con matrices y sus propiedades, los determinantes y sus propiedades y los sistemas de ecuaciones lineales. Aunque casi siempre hagamos referencia a matrices y coeficientes reales, todo es trasladable al caso de matrices y coeficientes complejos. De hecho, también consideraremos algunos detalles referidos a matrices complejas no reales. Cuando consideremos enunciados en los que de forma indistinta se pueden tomar coefiecientes reales o complejos, usaremos $\mathbb{K}$ para denotar al conjunto numérico ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Llamaremos **escalares** a los números reales o complejos, sin especificar ninguno en concreto.

Dado un número natural n denotaremos por $\mathbb{R}^n$ al conjunto de los vectores de n coordenadas reales, por $\mathbb{C}^n$ al de los vectores de n coordenadas complejas y por $\mathbb{K}^n$ al de los vectores de n coordenadas sin especificar si $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Salvo que se indique lo contrario, consideraremos y manipularemos los vectores de coordenadas como **vectores-columna**, indicando un vector-fila como el transpuesto de un vector-columna. Sobre los vectores con un número finito de coordenadas consideraremos las operaciones, usuales con dos y tres coordenadas, de suma de vectores (suma coordenada a coordenada) y multiplicación de un escalar por un vector, además de la multiplicación matriz-vector.

Salvo en la última sección, en la que consideraremos algunos ejemplos geométricos en el plano y el espacio (reales), no consideraremos en este tema el producto escalar de vectores reales ni los conceptos asociados (norma, ortogonalidad,...).

La definición que consideraremos de determinante, de un orden genérico, será una definición recursiva. Es decir, teniendo en cuenta la definición de determinante de orden 2 (y orden 3) definiremos un determinante de orden n en función de determinantes de orden $n-1$. Consideraremos las propiedades teniendo en cuenta que para determinantes de orden 2 y 3 son conocidas.

Aunque nuestro punto de partida sea la manipulación elemental de sistemas de ecuaciones lineales, con un número arbitrario de ecuaciones y de incógnitas, es **prerrequisito** el conocimiento básico de sistemas de ecuaciones lineales en dimensión pequeña (**sistemas con pocas ecuaciones y pocas incógnitas**):

- qué es y qué no es un sistema de ecuaciones lineales,
- qué es y qué no es una solución de un sistema de ecuaciones lineales,
- la resolución y discusión de un sistema de ecuaciones lineales con pocas incógnitas,
- los conceptos asociados a dicha resolución y discusión (compatibilidad e incompatibilidad, número de soluciones, rango de una matriz, ...),
- la expresión de las soluciones de un sistema compatible indeterminado,
- las operaciones sobre las ecuaciones de un sistema que no afectan a las soluciones.

Además, a la hora de interpretar geométricamente los conceptos y resultados asociados a los sistemas de ecuaciones lineales, será un instrumento fundamental la relación que tienen los sistemas de dos o tres ecuaciones y dos o tres incógnitas con la geometría analítica y vectorial del plano y del espacio tridimensional (reales): vectores, combinaciones lineales, rectas y planos dados por distintos tipos de ecuaciones (vectoriales, paramétricas, implícitas), etc.

3.1.- Matrices. Operaciones y propiedades.

Definición. *Una* **matriz** *A es un conjunto de números ordenados en filas y columnas, de forma que todas las filas tienen el mismo número de elementos y todas las columnas tienen* *el mismo número de elementos*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \cdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \cdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Si tiene m filas y n columnas, decimos que la **dimensión** de la matriz es $m \times n$. El elemento a_{ij} es el que está en la fila i-ésima y en la columna j-ésima. Si $m \neq n$ decimos que la matriz A es **rectangular** y si $m = n$ decimos que es una matriz **cuadrada**.

Como ya hemos dicho, las operaciones matriciales pueden considerarse tanto sobre matrices reales como sobre matrices complejas. Cuando se consideran matrices complejas hay que tener cuidado con el uso de la letra i para indicar el índice de las filas, puesto que también indica la unidad imaginaria.

Operaciones con matrices.

- **Suma de matrices.** *Dadas dos matrices* $A = [a_{hj}]$ *y* $B = [b_{hj}]$ *(reales o complejas) con las mismas dimensiones* $m \times n$*, la matriz suma* $A + B$ *es la matriz* $C = [c_{hj}]$ *con entradas* $c_{hj} = a_{hj} + b_{hj}$*.*

- **Producto de un número por una matriz.** *Dada una matriz* $A = [a_{hj}]$ *(real o compleja) y un escalar* α *(número) real o complejo, la matriz producto* αA *es la matriz*
$$\alpha A = [\alpha a_{hj}]\,.$$

- **Producto de matrices.** *Dada una matriz* $A, m \times n$ *y una matriz* $B, n \times p$*, la matriz producto* AB *es la matriz* $C = [c_{hj}]$ *de dimensiones* $m \times p$ *con entradas*
$$c_{hj} = \sum_{k=1}^{n} a_{hk} b_{kj}.$$
En el caso de una matriz A *cuadrada, las potencias* A^r *de exponente natural* $r = 1, 2, \ldots$ *están definidas mediante* $A^2 = AA,\ A^3 = A^2 A, \cdots$

- **Matriz Transpuesta.** *Dada una matriz* A *de dimensiones* $m \times n$*, su matriz transpuesta es la matriz, que denotaremos mediante* A^T*, de dimensiones* $n \times m$*, cuyo elemento* $(h, j), h = 1, \cdots, n;\ j = 1, \cdots m$ *es el elemento* a_{jh} *de la matriz* A*,*

  Se dice que una matriz A *es* **simétrica** *si coincide con su transpuesta,* $A^T = A$ *(para lo cual* A *tiene que ser cuadrada).*

- **Matriz Conjugada.** *Dada una matriz compleja* $A = [a_{hj}]$*, su matriz conjugada* $\overline{A}$ *es la matriz cuyos elementos son los conjugados de los elementos correspondientes de* A*, es decir, está definida por* $\overline{A} = [\overline{a_{hj}}]$*. Una matriz* A *es real si y sólo si* $\overline{A} = A$*.*

- **Matriz Transpuesta-conjugada.** *La matriz transpuesta-conjugada de una matriz compleja* $A = [a_{hj}]$ *es la matriz transpuesta de la matriz conjugada de* A *que se denota por* A^**. Es decir, el elemento* (h, j) *de* A^* *es* $\overline{a_{jh}}$*. Por tanto,* $A^* = \overline{(A^T)} = \left(\overline{A}\right)^T$ *y si* A *es real* $A^* = A^T$*.*

No vamos a detallar aquí cada una de las propiedades de las operaciones matriciales (Conmutatividad de la suma, elemento nulo y elemento opuesto respecto a la suma, elemento unidad, ...) aunque si citamos algunas a continuación.

(Algunas) Propiedades.

(1) *Distributiva del producto respecto a la suma. Siempre que las dimensiones de A, B y C permitan hacer las correspondientes operaciones suma y producto se verifica que*

$$A(B+C) = AB + AC \quad \text{y} \quad (B+C)A = BA + BC.$$

(2) *La transpuesta de un producto es el producto de las transpuestas en orden inverso,*

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

(3) *La transpuesta-conjugada de un producto es el producto de las transpuestas-conjugadas en orden inverso,*

$$(AB)^* = B^* A^*.$$

(4) *El* **producto** *de matrices* **no es conmutativo***, es decir, dadas dos matrices A y B* **puede suceder** *que $AB \neq BA$ aunque ambos productos tengan sentido y los resultados sean matrices con las mismas dimensiones (cosa que sucede si A y B son matrices cuadradas del mismo orden). No obstante:*

- *Hay matrices cuadradas que conmutan con cualquier otra del mismo orden. Dichas matrices son los múltiplos de la matriz identidad. Siendo I la matriz identidad de orden n, para cualquier matriz A de orden n y para cualquier escalar α se verifica que $(\alpha I)\ A = A\ (\alpha I) = \alpha A$.*
- *Hay parejas de matrices que conmutan.* **Ejercicio.** *Busca dos matrices A y B, cuadradas del mismo orden $n > 1$, tales que $AB = BA$ y de forma que ninguna de ellas sea un múltiplo de la identidad.*

(5) *Si dos matrices (cuadradas del mismo orden) conmutan, $AB = BA$, son válidas las expresiones usuales relativas a potencias de un binomio y desarrollo de productos. Es decir, se verifica que*

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB,\ (A-B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB,\ (A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

y las fórmulas correspondientes para potencias de mayor exponente.

Observaciones.

(a) Obviamente el que dos matrices A y B sean iguales es equivalente a que sean iguales elemento a elemento, $a_{hj} = b_{hj}$ para todo h, j. También es equivalente a que sean iguales *columna a columna.*

Supongamos que se trata de matrices $m \times n$ y denotemos por $e_k (k = 1, \ldots, n)$ a los vectores canónicos de n coordenadas (la coordenada k es 1 y las restantes son 0). Entonces la columna k de la matriz A es el producto Ae_k y la de B es Be_k. Por tanto,

$$A = B \Longleftrightarrow Ae_k = Be_k \ (\forall k = 1, 2, \ldots, n).$$

(b) En relación con el producto de matrices, notemos que cada columna de una matriz producto AB es una **combinación lineal** de las columnas de A. Es decir, cada columna de AB es una suma de múltiplos de las columnas de A. Los coeficientes de cada una de dichas combinaciones lineales vienen dados por la correspondiente columna de B.

Si A es una matriz $m \times n$, B una matriz $n \times p$ y denotamos por $b_1, \ldots, b_p$ a los vectores-columna de B (vectores pertenecientes a $\mathbb{R}^n$ en el caso de que B sea una matriz real), tenemos que

$$AB = A \left[\begin{array}{c|c|c|c} b_1 & b_2 & \ldots & b_p \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} Ab_1 & Ab_2 & \ldots & Ab_p \end{array} \right].$$

siendo cada columna Ab_k de la matriz producto una combinación lineal de las de A.

De forma similar, la matriz producto AB también puede ser descrita **por filas**: cada fila de AB es una combinación lineal de las filas de B, los coeficientes de cada una de dichas combinaciones lineales vienen dados por la correspondiente fila de A.

(c) En contraposición al producto de números el producto de dos matrices puede ser la matriz nula sin serlo ninguna de las dos, incluso tratándose de matrices cuadradas,

$$AB = 0 \not\Longrightarrow A = 0 \text{ ó } B = 0.$$

Ejercicio. Halla dos matrices cuadradas A, B de orden 2 tales que

$$AB = BA = 0.$$

Matriz inversa de una matriz cuadrada.

Definición. Matriz inversa. *Se dice que una matriz* **cuadrada** A *tiene inversa si existe una matriz* X *(cuadrada del mismo orden que* A*) tal que*

$$AX = I \quad \text{y} \quad XA = I.$$

En este caso, dicha matriz X tiene que ser única, se denomina **la inversa de** A y se denota por A^{-1}.

Si una matriz A tiene inversa A^{-1}, entonces A^{-1} tiene inversa que es $[A^{-1}]^{-1} = A$.

Las matrices (cuadradas) que no tienen inversa suelen denominarse singulares y las que tienen inversa suelen denominarse **no-singulares** o regulares. Puesto que el término *matriz regular* también suele utilizarse para otro tipo de matrices que no estudiaremos, nosotros no lo utilizaremos como sinónimo de matriz no-singular.

Observación. Puede suceder que para una cierta matriz A pueda obtenerse otra matriz X de forma que AX ó XA sea "una" matriz identidad y sin embargo la matriz A no tenga inversa. Esto sólo puede suceder para matrices no-cuadradas.

Por ejemplo, siendo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se verifica que $AX = I$ (matriz identidad de orden 2). Sin embargo A no tiene inversa (no hay ninguna matriz Y que verifique que $YA = I$ (matriz identidad de orden 3).

En lo que se refiere a la *aritmética* de las matrices no singulares, tenemos las siguientes propiedades.

Propiedades.- *Sean A y B matrices cuadradas $n \times n$ y sea α un número.*

(1) *Un múltiplo αA de A tiene inversa si y sólo si $\alpha \neq 0$ y la matriz A tiene inversa. En dicho caso $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$.*

(2) *A tiene inversa si y sólo si alguna potencia natural A^r tiene inversa. En dicho caso, cualquier potencia natural A^k tiene inversa y $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$.*

(3) *La matriz A tiene inversa si, y sólo si, su transpuesta A^T tiene inversa. En dicho caso, $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.*

(4) *La matriz producto AB tiene inversa si y sólo si A y B tienen inversa. En este caso, la inversa del producto es igual al producto de las inversas en orden contrario,*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(5) *Aunque A y B tengan inversa, puede suceder que $A + B$ no tenga inversa.* **Ejercicio.** *Busca un ejemplo.*

Notemos que si tenemos que un producto de matrices es la matriz nula, $AB = 0$, y una de las dos matrices (es cuadrada y) tiene inversa entonces la otra es nula.

3.2.- Determinantes. Definición y propiedades.

El **determinante** de una matriz cuadrada es un número que depende de las entradas de la matriz. A pesar de lo complicada que pueda ser la definición, tiene varias propiedades importantes en relación con: operaciones fila y operaciones columna sobre la matriz, dependencia e independencia lineal (de las filas y de las columnas), producto de matrices, etc. Vamos a describir los determinantes por sus propiedades. Para ello definimos el determinante de una matriz de forma recursiva: el determinante de una matriz 1×1 es la entrada de la matriz $\det(a) = a$, el determinante de una matriz 2×2 y de una matriz 3×3 también son conocidos por el alumno, así como sus propiedades. Para dichos determinantes y para determinantes de orden superior utilizamos como definición el desarrollo por los elementos de una fila, que reduce un determinante de orden n al cálculo de n determinantes de orden $n - 1$.

Si en una matriz A, cuadrada de orden n, suprimimos la fila r y la columna s, se obtiene una matriz de orden $n - 1$ que denotamos por A_{rs}.

Definición. (recursiva)

- Determinante de orden 2:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- Determinante de orden $n = 3, 4, \ldots$ (Desarrollo por los elementos de la primera fila)

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \cdots + (-1)^{1+j} a_{1j}\det(A_{1j}) + \cdots + (-1)^{1+n}\det(A_{1n}).$$

Ejemplo. El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos diagonales,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \cdots 0 \\ \vdots & B \end{bmatrix} = a_{11}\det(B), \qquad \det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Teorema. (Desarrollo por los elementos de una fila o columna)

- **Desarrollo por los elementos de una fila.** Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ se verifica

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\det(A_{ij}).$$

- **Desarrollo por los elementos de una columna.** Para cada $j = 1, 2, \ldots, n$ se verifica

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\det(A_{ij}).$$

Propiedades. Determinantes y operaciones-fila.

(1) Si en una matriz se intercambian dos filas (distintas) el determinante cambia de signo.

(2) Si en una matriz una fila se multilplica por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número.

(3) Si en una matriz a una fila se le suma un múltiplo de otra fila (distinta), el determinante no cambia.

(4) $\det(A) = 0 \iff$ alguna de las columnas de A es combinación lineal de las restantes $\iff$ alguna de las filas de A es combinación lineal de las restantes.

(5) $\det(A^T) = \det(A)$. Como consecuencia, en cada una de las propiedades anteriores podemos sustituir filas por columnas.

(6) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Si A tiene inversa, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

(7) La función determinante es lineal en cada columna (y en cada fila). Es decir, si tenemos por ejemplo una columna v_j expresada como combinación lineal de dos vectores $v_j = \alpha v_j' + \beta v_j''$, se verifica

$$\det \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} v_1 & \cdots & v_j & \cdots & v_n \end{array} \right] =$$

$$= \alpha \det \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} v_1 & \cdots & v_j' & \cdots & v_n \end{array} \right] + \beta \det \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} v_1 & \cdots & v_j'' & \cdots & v_n \end{array} \right].$$

Las propiedades de los determinantes se pueden resumir en dos:

- La **linealidad** en cada fila y en cada columna (propiedad **(7)**.
- La **antisimetría** (propiedad **(1)**) tanto respecto a filas como a columnas.

3.3.- Sistemas de ecuaciones lineales.

3.3.1.- Definiciones y notación matricial.

Consideraremos sistemas de $m = 1, 2, \ldots$ ecuaciones lineales con $n = 1, 2, \ldots$ incógnitas que denotaremos por $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es decir sistemas de ecuaciones de la forma

$$\left.\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}.$$

Si los coeficientes de las incógnitas $a_{ij},\ i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n$, y los términos independientes $b_i,\ i = 1, \ldots, m$, son números reales, estudiaremos las soluciones reales del sistema. Si alguno de los coeficientes de las incógnitas o de los términos independientes fuera un número complejo (con parte imaginaria no nula) habría que estudiar las soluciones complejas de dicho sistema.

Asociadas al sistema dado, consideraremos la **matriz** $A = [a_{ij}]$, de los coeficientes de las incógnitas, el vector-columna $b = [b_i]$, de los términos independientes ,y la **matriz ampliada**, $[A|b]$. De esta forma el sistema de ecuaciones lineales dado se expresa en forma matricial mediante $Ax = b$;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad [A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Cada fila de la matriz $[A|b]$ está formada por los coeficientes de la correspondiente ecuación del sistema. Cada una de las n primeras columnas está formada por los coeficientes de una de las incógnitas. La última columna está formada por los términos independientes de las ecuaciones del sistema.

3.3.2.- Reducción por filas y formas escalonadas.

La herramienta básica para estudiar y resolver un sistema de ecuaciones lineales es el bien conocido **método** de eliminación (o reducción) de **Gauss**. Desde el punto de vista matricial, consiste en la **reducción (por filas)** de la matriz ampliada del sistema a **forma escalonada superior** mediante operaciones sobre las filas de la matriz ampliada (equivalentemente, sobre las ecuaciones del sistema). La característica fundamental de dichas operaciones será que no afectan a las posibles soluciones del sistema y que son reversibles. Es decir, mediante una operación similar se podrá recuperar la matriz y el sistema originales. Una vez obtenida dicha forma escalonada superior las soluciones del sistema resultante se podrán calcular mediante **sustitución regresiva**.

Definición. *Se dice que una matriz es* **escalonada por filas** *si*

- *todos los elementos que están por debajo del primer elemento no nulo de cada fila son nulos,*
- *el primer elemento no nulo de cada fila está a la derecha del primer elemento no nulo de la fila anterior y*
- *las filas nulas (si las hay) están por debajo de las filas no nulas.*

La definición análoga se aplica a un sistema de ecuaciones (escrito en forma desarrollada).

Ejemplo. La forma elemental de resolver un sistema de ecuaciones lineales como por ejemplo

$$\left.\begin{array}{lrrrrcr} E_1: & & 2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 2 \\ E_2: & x_1 & -x_2 & +x_3 & +3x_4 & = & -2 \\ E_3: & -2x_1 & +3x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & 0 \end{array}\right\}$$

consiste en ir reduciendo el problema de obtener soluciones del sistema dado al de obtener soluciones de sistemas con cada vez menos ecuaciones y menos incógnitas. De esta forma, si resolvemos el último sistema de ecuaciones podemos obtener las soluciones del sistema original.

Reducción a forma escalonada: Volviendo a renombrar en cada paso cada una de las ecuaciones, para resolver el sistema anterior podemos hacer las siguientes operaciones sobre las ecuaciones del sistema dado

$$\left.\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Intercambio} \\ \longrightarrow \\ E_1 \leftrightarrow E_2 \end{array} \left\{\begin{array}{lrrrrcr} E_1: & x_1 & -x_2 & +x_3 & +3x_4 & = & -2 \\ E_2: & & 2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 2 \\ E_3: & -2x_1 & +3x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{c} E_3 \leftarrow E_3 + 2E_1 \\ \longrightarrow \end{array} \left\{\begin{array}{lrrrrcr} E_1: & x_1 & -x_2 & +x_3 & +3x_4 & = & -2 \\ E_2: & & 2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 2 \\ E_3: & & x_2 & +x_3 & +4x_4 & = & -4 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{c} E_3 \leftarrow E_3 - \frac{1}{2}E_2 \\ \longrightarrow \end{array} \left\{\begin{array}{lrrrrcr} E_1: & x_1 & -x_2 & +x_3 & +3x_4 & = & -2 \\ E_2: & & 2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 2 \\ E_3: & & & (3/2)x_3 & +(7/2)x_4 & = & -5 \end{array}\right\}$$

Del sistema final obtenido podemos deducir varias consecuencias:

- **Sustitución regresiva**: si damos a x_4 un valor arbitrario $x_4 = \alpha \in \mathbb{K}$, puesto que el coeficiente de x_3 en la ecuación E_3 es distinto de cero, podemos despejar x_3 en función de x_4,

$$x_3 = \frac{2}{3}\left(-5 - \frac{7}{2}\alpha\right) = -\frac{10}{3} - \frac{7}{3}\alpha.$$

De la ecuación E_2 podemos despejar x_2 en función de x_3 y x_4, y por tanto en función de x_4,

$$x_2 = \frac{1}{2}(2 + x_3 - x_4) = 1 - \frac{5}{3} - \frac{7}{6}\alpha - \frac{1}{2}\alpha = -\frac{2}{3} - \frac{5}{3}\alpha.$$

Por último, de la ecuación E_1 podemos despejar x_1, en función de x_2, x_3 y x_4 y por tanto en función de x_4,

$$x_1 = -2 + x_2 - x_3 - 3x_4 = \frac{2}{3} - \frac{7}{3}\alpha.$$

Resumiendo, las soluciones del sistema dado son los vectores de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} - \frac{7}{3}\alpha \\ -\frac{2}{3} - \frac{5}{3}\alpha \\ -\frac{10}{3} - \frac{7}{3}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{10}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

- El proceso anterior permite obtener las soluciones del **sistema homogéneo** asociado al dado que son

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3}\alpha \\ -\frac{5}{3}\alpha \\ -\frac{7}{3}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

- ¿Para qué otros términos independientes tendría solución el sistema (con los mismos coeficientes de las incógnitas)? Siempre.
- ¿Cuantas soluciones tendría el sistema con otros términos independientes? Sea quién sea el término independiente tendríamos un sistema compatible indeterminado.
- ¿Qué puede suceder si al sistema original le añadimos o le quitamos una ecuación?

Ejercicio.- Traslada las operaciones hechas sobre las ecuaciones del sistema anterior a operaciones fila sobre la matriz ampliada del sistema.

Las tres operaciones elementales que hemos considerado, sobre las ecuaciones de un sistema de ecuaciones lineales,

- Intercambio de ecuaciones;
- Multiplicación de una ecuación por un número distinto de cero;
- Sumar a una ecuación un múltiplo (arbitrario) de otra (distinta);

no afectan a las (posibles) soluciones del sistema: Cualquier solución del sistema original lo es del que se obtiene y viceversa.

Estas operaciones elementales, sobre las ecuaciones de un sistema, se corresponden con manipulaciones de las filas de la matriz ampliada del sistema, puesto que afectan exclusivamente a los coeficientes de las ecuaciones que intervienen y no a las incógnitas.

Definición. *Llamaremos* **operaciones elementales por filas** *sobre una matriz a:*

(a) *Intercambiar filas.*

(b) *Multiplicar una fila por un número distinto de cero.*

(c) *Sumar a una fila un múltiplo de otra (distinta).*

Como ya hemos dicho, una propiedad importante de las operaciones elementales es que son reversibles. Es decir, si al hacer una determinada operación elemental sobre una matriz M se obtiene la matriz N, entonces podemos recuperar la matriz M original haciendo una operación elemental (que además es del mismo tipo) sobre la matriz N.

Teorema. *Toda matriz A puede ser reducida a forma escalonada por filas mediante operaciones elementales por filas.*

Algoritmo de Gauss: Supongamos que A es una matriz no nula.

(1) Si la primera columna de A tiene algún elemento no nulo, seleccionamos uno de dichos elementos y mediante intercambio de filas lo llevamos a la posición $(1, 1)$. En caso contrario, pasamos a la siguiente columna.

(2) **Pivotamos** hacia abajo con el elemento no nulo seleccionado, llamado **pivote**. Es decir, a cada una de las filas siguientes le restamos un múltiplo de la fila del pivote de forma que se anule el correspondiente elemento en la columna del pivote.

(3) Se repite el proceso con la matriz que queda al eleminar la fila y columna del pivote. Es decir, pasamos a la siguiente columna y buscamos un pivote (elemento no nulo) en una fila posterior a la del pivote utilizado en el paso (2).

(4) El proceso se termina cuando, o bien no quedan columnas en las que obtener el siguiente pivote, o bien dichas columnas están formadas por ceros.

En forma esquemática, al aplicar el algoritmo anterior a una matriz A, tendremos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{fila}]{\text{operaciones}} U = \begin{bmatrix} \boxed{*} & * & * & * & \cdots & * & * & * \\ 0 & \boxed{*} & * & * & \cdots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{*} & \cdots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \boxed{*} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{*} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es posible que no se obtenga una última fila de ceros o que haya varias filas nulas.

Observaciones.

(1) El algoritmo que acabamos de describir:

- buscar pivotes por columnas (de izquierda a derecha),
- intercambiar filas si es necesario,
- *pivotar hacia abajo* para hacer ceros por debajo del pivote,

no determina de forma única la **forma escalonada** superior por filas que se obtiene, sino que ésta depende de las operaciones fila que se hagan, es decir de la elección de pivote que se haga en cada columna donde sea posible.

(2) Si la matriz A es $m \times n$, el número r de pivotes que aparecen es menor o igual que m, puesto que una fila tiene a lo sumo hay un pivote, y menor o igual que n, puesto que en una columna hay, a lo sumo, un pivote.

(3) **Forma escalonada reducida** (por filas). En cada una de las columnas donde se haya obtenido un pivote, podemos **pivotar hacia arriba** para anular los elementos que están en la misma columna por encima del pivote. Además, podemos dividir cada fila donde aparezca un pivote, por dicho pivote. De esta forma pasaremos a tener un 1 en cada posición pivote. En la situación esquematizada antes pasaríamos a tener

$$U \xrightarrow[\text{fila}]{\text{operaciones}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & * & 0 & \cdots & 0 & 0 & * \\ 0 & \boxed{1} & * & 0 & \cdots & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \cdots & 0 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \boxed{1} & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta forma escalonada por filas (con pivotes iguales a 1 y ningún otro elemento no nulo en las columnas pivote) se denomina forma escalonada reducida de la matriz.

(4) Puede demostrarse que cualquier matriz A es equivalente, por filas, a una única matriz escalonada reducida por filas. Es decir, si mediante operaciones elementales (por filas) sobre la matriz A obtenemos una matriz U que está en forma escalonada reducida, al hacer otra serie de operaciones elementales para obtener una forma escalonada reducida obtendremos la misma matriz U aunque las operaciones intermedias sean distintas.

3.3.3.- Teorema de Rouché-Frobenius.

Para estudiar y resolver un sistema de ecuaciones $Ax = b$, basta con reducir (mediante operaciones por fila) la matriz ampliada del sistema $[A|b]$ a forma escalonada por filas.

En el resultado de dicha reducción a forma escalonada tendremos un cierto número de pivotes en las primeras n columnas (la parte correspondiente a la matriz A) y la columna de los términos independientes podrá ser columna pivote o no.

La **compatibilidad** del sistema dependerá de que la columna de los términos independientes sea o no sea una columna pivote. Si dicha columna es una columna pivote aparecerá alguna fila de la (forma escalonada de la) matriz ampliada del tipo

$$[\, 0\ 0 \cdots 0 \mid \boxed{*} \neq 0 \,]$$

en cuyo caso el sistema no tendrá solución por no existir solución de la ecuación asociada a la fila dada. En caso contrario, cada fila de la matriz ampliada donde aparezca un pivote lo tendrá en la parte correspondiente a la matriz A y el sistema tendrá solución.

Suponiendo que el sistema es compatible, la **determinación o indeterminación** del sistema dependerá, de que (en la matriz A) haya o no haya columnas que no sean columnas pivote. Las variables/incógnitas correspondientes a columnas que no son pivote se denominan **variables libres**. Las correspondientes a columnas-pivote se denominan variables fijas. Dando valores arbitrarios a las variables libres y calculando los correspondientes valores de las variables fijas se obtiene una solución del sistema.

El resultado que resume la discusión de un sistema de ecuaciones lineales, en función de la matriz de coeficientes de las incógnitas y de la matriz ampliada, es el teorema de Rouché-Frobenius. Los alumnos conocen este resultado, de segundo curso de Bachillerato, para sistemas con pocas incógnitas y expresado en términos del rango de la matriz y de la matriz ampliada del sistema. Nosotros definiremos el concepto de rango más adelante y enunciamos dicho teorema (para un sistema con un número genérico de ecuaciones y de incógnitas) en términos del **número de pivotes** que se obtienen al reducir a forma escalonada por filas la matriz y la matriz ampliada del sistema.

Teorema (Rouché-Frobenius). *Sea $Ax = b$ un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas (A es una matriz $m \times n$) y supongamos que al reducir a forma escalonada por filas obtenemos r pivotes en la matriz A. Se verifica:*

(1) $r \leq \min\{m, n\}$.

(2) *$Ax = b$ es compatible $\Longleftrightarrow$ la columna del término independiente, b, NO es una columna pivote.*

(3) **(a)** *$Ax = b$ es un Sistema Compatible Determinado $\Longleftrightarrow$ La columna del término independiente no es una columna pivote y $r = n$ (todas las columnas de A son columnas-pivote.*

(b) *$Ax = b$ es un Sistema Compatible Indeterminado $\Longleftrightarrow$ La columna del término independiente no es una columna pivote y $r < n$ (hay alguna columna de A que no es columna-pivote.*

Corolario. *En las condiciones del teorema anterior, se verifica:*

(1) *Si $r = n$, $Ax = b$ puede ser*

- **(a)** *compatible determinado ó*
- **(b)** *incompatible.*

(2) *Si $r = m$ el sistema es compatible y puede ser*

- **(a)** *compatible determinado ($r = m = n$) ó*
- **(b)** *compatible indeterminado ($r = m < n$).*

(3) *Si $m = n$ el sistema puede ser*

- **(a)** *compatible determinado ($r = m = n$) para cualquier $b \in \mathbb{K}^n$, ó*
- **(b)** *incompatible ($r < m = n$) para algún $b \in \mathbb{K}^m$.*

3.3.4. Regla de Cramer.

Al igual que el teorema de Rouché-Frobenius, la regla de Cramer ya es conocida de Bachillerato para sistemas con pocas ecuaciones e incógnitas. Dicha regla es la fórmula de la solución de un sistema cuadrado (el mismo número de ecuaciones que de incógnitas) cuando tiene solución única. Dicha fórmula es compañera de la fórmula de la inversa de una matriz (cuadrada que tenga inversa) en términos de los adjuntos de los elementos de la matriz considerada.

Dada una matriz cuadrada A de orden n, un vector columna $b \in \mathbb{K}^n$ y un índice $i = 1, 2, \ldots, n$, denotamos por $A_i(b)$ a la matriz que se obtiene al sustituir en A la columna $i-$ésima por el vector b. Es decir, siendo $a_1, \cdots, a_n$ los vectores columna de A,

$$A_i(b) = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} & & & & \\ a_1 & \cdots & b & \cdots & a_n \\ & & & & \end{array}\right]. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow \\ \qquad\qquad\qquad \text{columna } i$$

Se suele denominar **matriz adjunta** de A (cuidado: no en todos los textos significa lo mismo este nombre), a la matriz dada por

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} \det[A_{11}] & -\det[A_{12}] & \cdots & \pm\det[A_{1n}] \\ -\det[A_{21}] & \det[A_{22}] & \cdots & \mp\det[A_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm\det[A_{n1}] & \mp\det[A_{n2}] & \cdots & \det[A_{nn}] \end{bmatrix}.$$

Teorema. Sea A una matriz cuadrada de orden n con $\det(A) \neq 0$. Se verifica:

(1) (Regla de Cramer) Para cada $b \in \mathbb{K}^n$ el sistema de ecuaciones $Ax = b$ tiene solución única x dada por

$$x_i = \frac{\det[A_i(b)]}{\det(A)}, \quad x = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \det[A_1(b)] \\ \vdots \\ \det[A_i(b)] \\ \vdots \\ \det[A_n(b)] \end{bmatrix}.$$

(2) (Fórmula de la inversa) A tiene inversa y su inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} [\mathrm{adj}(A)]^T,$$

es decir, el elemento (i, j) de la matriz inversa de A es $\dfrac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j}\det(A_{ji})$.

3.4.- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

3.4.1.- Método de Gauss-Jordan.

Ya hemos considerado el método de Gauss que consiste en las dos etapas esenciales en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales:

- *Reducción a forma escalonada* de la matriz ampliada del sistema, mediante operaciones fila.
- Resolución de la forma escalonada mediante *sustitución regresiva*.

La variante que suele denominarse método de Gauss-Jordan consiste en la obtención de la **forma escalonada reducida** de la matriz/matrices de los coeficientes. Es decir, una vez obtenida la forma escalonada *se pivota hacia arriba* para anular todos los elementos no nulos que puedan quedar por encima del pivote, y se divide cada fila por su pivote.

Una vez obtenida la forma escalonada reducida de la matriz ampliada del sistema, podremos expresar las variables fijas (correspondientes a columnas pivote) en función de las variables libres (de forma única). En caso de tener un sistema compatible, cada solución del sistema podrá obtenerse mediante unos ciertos valores de las variables libres y los correspondientes valores de las variables fijas. En la sección 3.5 analizaremos con más detalle las consecuencias de esto sobre los sistemas homogéneos y sobre los sistemas completos.

3.4.2.- Cálculo de la inversa de una matriz cuadrada.

Como ya se ha citado en el epígrafe dedicado a la regla de Cramer y a la fórmula de la inversa de una matriz, el cálculo de la inversa de una matriz puede plantearse como el de la resolución de los sistemas de ecuaciones que tienen a dicha matriz como matriz de los coeficientes de las incógnitas y a los vectores canónicos como términos independientes. Al utilizar el método de eliminación de Gauss, una parte de la resolución de un sistema depende sólo de la matriz de los coeficientes de las incógnitas. Por tanto, el cálculo de la inversa de una matriz cuadrada A de orden n puede plantearse como la resolución simultánea de los sistemas

$$Ax = e_1,\ Ax = e_2, \ldots, Ax = e_n.$$

De forma equivalente, puede plantearse como la resolución de la ecuación matricial $AX = I$. Si reducimos, a forma escalonada por filas, la matriz ampliada $[A|I]$ (el término independiente es la matriz I) y alguna de las primeras n columnas (las correspondientes a la matriz A) no es pivote, la matriz A no tiene inversa. Si las primeras n columnas son columnas pivote, la matriz A tendrá inversa. En este caso tendremos un pivote en cada una de las primeras n columnas. Pivotando hacia arriba podemos anular (mediante operaciones-fila, que no afectan a las soluciones) los elementos no nulos que puedan estar por encima del pivote. De esta forma, los únicos elementos no nulos de las primeras n columnas serán los elementos diagonales. Dividiendo cada **fila** por su pivote tendremos un uno en cada una de las posiciones diagonales y por tanto en las primeras n columnas tendremos la matriz identidad de orden n. De esta forma, la solución de uno de los sistemas originales $Ax = e_k$ es la solución del correspondiente sistema $Ix =$columna k de la matriz que queda a la derecha de I. Es decir, la solución de $Ax = e_k$ es la columna k citada y la solución de la ecuación matricial $AX = I$ es la matriz que queda a la derecha de la matriz identidad I. De forma esquemática, en el caso de tener

n pivotes en la parte de la matriz A, la inversa de A puede calcularse

$$[A|I] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{*} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \boxed{*} & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{*} & * & * & \cdots & * \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{*} & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \boxed{*} & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{*} & * & * & \cdots & * \end{array}\right] \longrightarrow [I|A^{-1}].$$

El mismo planteamiento que se ha utilizado con la ecuación matricial $AX = I$ (con A matriz cuadrada) puede usarse para una ecuación matricial de la forma $AX = B$ siendo A y B matrices dadas con dimensiones apropiadas y siendo X la matriz incógnita. Si la matriz A es cuadrada y tiene inversa habrá una única matriz solución y si no es cuadrada puede que haya una cantidad infinita de matrices X que verifiquen la igualdad o puede que no haya ninguna.
Ejercicio. ¿Cómo aplicarías lo anterior para resolver una ecuación matricial de la forma $XA = B$?

3.5.- El conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales.

3.5.1.- Combinaciones lineales.

Al describir las columnas de una matriz producto ya hemos considerado el concepto de combinación lineal.

Definición.

(a) *Dados* $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K}^m$, *se llama* **combinación lineal** *de dichos vectores a todo vector de la forma*

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n, \quad \text{con } c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}.$$

(b) *Dados* $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K}^m$, *se llama* **subespacio generado** *por dichos vectores al conjunto de todas sus combinaciones lineales. Dicho conjunto se denota por*

$$\text{Gen}\left(\{v_1, \ldots, v_n\}\right) = \{c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n : c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}\}.$$

Las combinaciones lineales de vectores aparecen asociadas a los sistemas de ecuaciones lineales de varias formas:

- La igualdad $Ax = b$ puede considerarse como la igualdad entre el vector columna b, de los términos independientes, y una suma de múltiplos de las columnas de A,

$$Ax = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Es decir, determinar si un sistema es compatible o no es determinar si el término independiente b puede expresarse, o no, como combinación lineal de las columnas de A. Reciprocamente, determinar si un cierto vector, $v \in \mathbb{K}^m$, es o no combinación lineal de otros vectores, $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K}^m$, es lo mismo que determinar si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución,

$$c_1 \begin{bmatrix} \vdots \\ v_1 \\ \vdots \end{bmatrix} + \cdots + c_n \begin{bmatrix} \vdots \\ v_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ v \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

En dicho caso cada una de las posibles soluciones nos dará una forma de expresar v como combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$.

- Al resolver un sistema homogéneo, con soluciones no triviales, las soluciones pueden expresarse como combinación lineal arbitraria de un cierto número de soluciones particulares.

Trasladando a sistemas de ecuaciones lineales el caso de vectores que generan todo el espacio de coordenadas correspondiente tenemos el siguiente resultado.

Teorema. *Sea A una matriz (real) $m \times n$. Son equivalentes:*

(a) *$Ax = b$ tiene solución para cualquier $b \in \mathbb{R}^m$.*

(b) *Las columnas de A generan todo $\mathbb{R}^m$.*

(c) *A tiene un pivote en cada fila.*

En dicho caso, tiene que ser $m \leq n$.

Si la matriz A es cuadrada ($m = n$) las condiciones anteriores son equivalentes a

(d) *A tiene inversa.*

3.5.2.- Sistemas homogéneos.

Un sistema homogéneo (de m ecuaciones lineales con n incógnitas) $Ax = 0$ siempre tiene solución puesto que el vector nulo $0 \in \mathbb{R}^n$ verifica $A0 = 0 \in \mathbb{R}^m$. Esta solución se denomina **solución trivial** o nula. La cuestión para un sistema homogéneo es si tiene soluciones no triviales y cómo describirlas.

Teorema.- *Consideremos un sistema homogéneo $Ax = 0$.*

(a) *$Ax = 0$ tiene alguna solución no trivial si, y sólo si, tiene alguna variable libre.*

(b) *Cualquier combinación lineal de soluciones de $Ax = 0$ es solución de $Ax = 0$.*

  (b1) *La suma de soluciones de $Ax = 0$ es otra solución de $Ax = 0$.*

  (b2) *Cualquier múltiplo de una solución de $Ax = 0$ es otra solución de $Ax = 0$.*

Supongamos que al resolver un sistema homogéneo, por ejemplo con 5 incógnitas, obtenemos 2 variables libres, por ejemplo x_3 y x_5. Asociada a cada una de las variables libres tenemos una solución y el conjunto solución del sistema homogéneo será el conjunto de todas las combinaciones lineales de las dos soluciones citadas.

Ejemplo. Supongamos que al reducir a forma escalonada un sistema homogéneo de 4 ecuaciones con 5 incógnitas obtenemos, en forma matricial,

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{2} & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Es decir tenemos 3 pivotes y 2 variables libres, x_3 y x_5. Asociada a cada una de las variables libres tenemos una solución:

- solución que se obtiene para $x_3 = 1, x_5 = 0$. Sustituyendo en el sistema

$$\left[\begin{array}{cccccc} 2x_1 & -x_2 & +3 & +x_4 & = & 0 \\ 0 & -x_2 & +1 & -2x_4 & = & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3x_4 & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_2 = 1 \\ 2x_1 = x_2 - 3 - x_4 = -2 \end{array}\right] \Rightarrow u_1 = \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{array}\right].$$

- solución que se obtiene para $x_3 = 0, x_5 = 1$. Sustituyendo en el sistema

$$\left[\begin{array}{cccccc} 2x_1 & -x_2 & +x_4 & +1 & = & 0 \\ 0 & -x_2 & -2x_4 & & = & 0 \\ & & 3x_4 & +4 & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 = 0, \\ x_5 = 1, \\ x_4 = -\frac{4}{3}, \\ x_2 = -2x_4 = \frac{8}{3}, \\ 2x_1 = x_2 - x_4 - 1 = 3 \end{array}\right] \Rightarrow u_2 = \left[\begin{array}{c} 3/2 \\ 8/3 \\ \mathbf{0} \\ -4/3 \\ \mathbf{1} \end{array}\right].$$

Cualquier combinación lineal de u_1 y u_2 ($\alpha u_1 + \beta u_2,\quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}$) es solución del sistema homogéneo dado y cualquier solución del sistema homogéneo se puede expresar como combinación lineal de u_1 y u_2. Para comprobar esto basta con despejar, en el sistema escalonado obtenido, las variables fijas x_1, x_2 y x_4 en función de las variables libres x_3 y x_5, a partir de

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \\ 0 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & & = & 0 \\ & & & 3x_4 & +4x_5 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 2x_1 & -x_2 & +x_4 & = & -3x_3 - x_5 \\ 0 & -x_2 & -x_4 & = & -x_3 \\ & & 3x_4 & = & -4x_5 \end{array}\right].$$

Notemos que para cada valor que demos a x_3 y a x_5 el sistema anterior tiene una única solución (x_1, x_2, x_4),

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_4 & = & -\frac{4}{3}x_5, \\ x_2 & = & x_3 - 2x_4 = x_3 + \frac{8}{3}x_5, \\ x_1 & = & \frac{1}{2}(x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5) = \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{8}{3}x_5 - 3x_3 + \frac{4}{3}x_5 - x_5\right) \\ & = & \frac{1}{2}(-2x_3 + 3x_5) = -x_3 + \frac{3}{2}x_5, \end{array}\right.$$

y, por tanto, las soluciones $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ del sistema dado las podemos expresar en función de x_3 y x_5 mediante

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 + \frac{3}{2}x_5 \\ x_3 + \frac{8}{3}x_5 \\ x_3 \\ -\frac{4}{3}x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{8}{3} \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Es decir, las soluciones son las combinaciones lineales de u_1 y u_2. Dicho de otra forma, el conjunto solución del sistema dado es igual al subespacio generado por $\{u_1, u_2\}$.

Por otra parte, la estructura del conjunto solución de un sistema homogéneo $Ax = 0$ puede resumirse con el siguiente resultado:

Teorema. *Si al reducir A a forma escalonada se obtienen r pivotes (equivalentemente, $n-r$ variables libres), pueden obtenerse $n-r$ soluciones, $u_1, \ldots, u_{n-r}$, tales que la solución general de $Ax = 0$ es*

$$\text{Gen}\,\{u_1, \ldots, u_{n-r}\} = \{x = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{n-r}u_{n-r} \in \mathbb{K}^n : \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{K}\}\,.$$

Obviamente, la forma de obtener las $n-r$ soluciones citadas no es única.

3.5.3.- Sistemas completos.

El conjunto de soluciones (lo que suele llamarse la **solución general** o conjunto-solución) de un sistema $Ax = b$ de m ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$$

tiene una estructura muy definida que es reflejo de la linealidad de las ecuaciones. Esta estructura puede expresarse mediante la relación entre el conjunto-solución de un sistema $Ax = b$ completo (no homogéneo) y el conjunto solución del sistema homogéneo asociado $Ax = 0$.

La estructura citada se basa en las propiedades del producto matriz×vector,

$$A(u+v) = Au + Av, \quad \text{y} \quad A(cu) = cAu.$$

Notemos que si consideramos un sistema de ecuaciones $Ax = b$ y el sistema homogéneo asociado $Ax = 0$, se verifica que:

(a) Al restar dos soluciones de $Ax = b$ se obtiene una solución del sistema homogéneo $Ax = 0$,

$$\left.\begin{matrix} Av_1 = b \\ Av_2 = b \end{matrix}\right\} \Longrightarrow A(v_1 - v_2) = 0.$$

(b) Al sumar una solución del sistema completo $Ax = b$ y una solución del sistema homogéneo $Ax = 0$ se obtiene otra solución del sistema completo,

$$\left.\begin{matrix} Av = b \\ Au = 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow A(v+u) = b.$$

Ejemplo. Consideremos un sistema no homogéneo con la matriz A de los coeficientes de las incógnitas dada en el ejemplo anterior. Por ejemplo, el sistema asociado a la matriz ampliada

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{2} & -1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Teniendo en cuenta cuáles son las variables fijas y las variables libres, podemos resolver el sistema anterior despejando (x_1, x_2, x_4) en función de (x_3, x_5) mediante sustitución regresiva:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_4 & = & \frac{1}{3}(3-4x_5) = 1 - \frac{4}{3}x_5, \\ x_2 & = & 1 + x_3 - 2x_4 = 1 + x_3 - \frac{2}{3}(3-4x_5) = -1 + x_3 + \frac{8}{3}x_5, \\ x_1 & = & \frac{1}{2}(2 + x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5) = \frac{1}{2}\left(2 - 1 + x_3 + \frac{8}{3}x_5 - 3x_3 - 1 + \frac{4}{3}x_5 - x_5\right) = \\ & = & \frac{1}{2}(-2x_3 + 3x_5) = -x_3 + \frac{3}{2}x_5. \end{array}\right.$$

Por tanto las, soluciones del sistema completo son de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 + \frac{3}{2}x_5 \\ -1 + x_3 + \frac{8}{3}x_5 \\ x_3 \\ 1 - \frac{4}{3}x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{8}{3} \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Es decir, están expresadas como la suma de un cierto vector más todas las soluciones del sistema homogéneo asociado $Ax = 0$.

La relación entre el conjunto solución de un sistema completo arbitrario, $Ax = b$, y el del sistema homogéneo asociado, $Ax = 0$, está recogida en el siguiente resultado:

Teorema. *Sea A una matriz $m \times n$ y b un vector $m \times 1$. Se verifica que*

$$\begin{bmatrix} \textit{solución general} \\ \textit{del sistema completo} \\ Ax = b \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \textit{solución particular} \\ \textit{del sistema completo} \\ Ax = b \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \textit{solución general} \\ \textit{del sistema homogéneo} \\ \textit{asociado } Ax = 0 \end{bmatrix}.$$

Es decir: si tenemos una solución particular v_p del sistema $Ax = b$, se verifica que

a) Cualquier otra solución v del sistema $Ax = b$ se puede expresar como $v_p +$ una solución $(v - v_p)$ del sistema homogéneo asociado.

b) Al sumar v_p con una solución de $Ax = 0$ se obtiene una solución de $Ax = b$.

Observación. Desde un punto de vista geométrico:

- Si el conjunto solución de $Ax = 0$ es un punto (que necesariamente será $x = 0$), el conjunto solución de un sistema completo $Ax = b$ podrá ser o bien un punto (el origen desplazado según el vector v_p) o bien el conjunto vacío (si el sistema $Ax = b$ no tiene solución).

- Si el conjunto solución de $Ax = 0$ es una recta (que necesariamente pasará por el origen de coordenadas), el conjunto solución de un sistema completo $Ax = b$ podrá ser, o bien una recta paralela a la anterior (la recta anterior desplazada según el vector v_p), o bien el conjunto vacío (si el sistema $Ax = b$ no tiene solución).

- Si el conjunto solución de $Ax = 0$ es un plano (que necesariamente pasará por el origen de coordenadas), el conjunto solución de un sistema completo $Ax = b$ podrá ser o bien una plano paralelo al anterior (el plano anterior desplazado según el vector v_p) o bien el conjunto vacío (si el sistema $Ax = b$ no tiene solución).

Ejercicio. Pon un ejemplo para cada una de las situaciones descritas anteriormente.

Ejercicio. Dado un sistema $Ax = b$ de 4 ecuaciones con 3 incógnitas, determina la solución general del sistema dado sabiendo que 2 de sus soluciones son

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

y que al reducir A a forma escalonada se obtienen 2 pivotes.

3.6.- Transformaciones lineales. Matriz asociada.

3.6.1.- Transformación asociada a una matriz.

Definición. *Se dice que una transformación $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ que a cada vector $x \in \mathbb{R}^n$ le hace corresponder un vector $Tx = y \in \mathbb{R}^m$ es* **lineal** *si se verifica que*

$$T(\alpha x + \beta x') = \alpha T(x) + \beta T(x'), \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ y } \forall x, x' \in \mathbb{R}^n.$$

Observaciones.

(1) Toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ transforma el vector nulo de $\mathbb{R}^n$ en el vector nulo de $\mathbb{R}^m$.

(2) Toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ no nula transforma una recta en una recta (o un punto), un segmento en otro segmento (o un punto), un paralelogramo en otro paralelogramo o un segmento o un punto, etc. En general, transforma cualquier combinación lineal de los vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ de $\mathbb{R}^n$ en una combinación lineal de los vectores $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ de $\mathbb{R}^m$.

Proposición-Definición. *Dada una transformacón lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, existe una única matriz A (de dimensiones $m \times n$) que verifica que la imagen de cualquier vector $x \in \mathbb{R}^n$ es $T(x) = Ax \in \mathbb{R}^m$, esto es, es la única matriz que al multiplicarla por un vector $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario da el vector transformado de x mediante T. A esa matriz A se le llama* **matriz asociada a** *T (respecto de las bases canónicas $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ y $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}$ de $\mathbb{R}^m$). Además, esa matriz tiene por columnas los vectores $T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n)$,*

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ T(e_1) & T(e_2) & \cdots & T(e_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{array}\right].$$

Definición. *Consideremos una aplicación lineal* $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$*.*
Se denomina **núcleo** *de* T *y se denota por* $\ker(T)$ *al conjunto*

$$\ker(T) = \{x \in \mathbb{R}^n : T(x) = 0\}.$$

Se denomina conjunto **imagen** *de* T *al conjunto de todos los vectores de* $\mathbb{R}^m$ *que son imagen de algún vector de* $\mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{Im}(T) = T(\mathbb{R}^n) = \{T(x) : x \in \mathbb{R}^n\} = \{y \in \mathbb{R}^m : \quad \text{existe} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{con} \quad T(x) = y\}.$$

Ejemplos. Consideremos las siguientes matrices reales 2×2,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) La matriz A transforma el cuadrado unidad en el paralelogramo determinado por los vectores $v_1 = (2, 1)$ y $v_2 = (-1, 1)$.

(b) La matriz B transforma el cuadrado unidad en el segmento de recta que une el origen de coordenadas con el punto $(6, 3)$.

(c) La matriz C transforma la recta $y = x$ en el eje OX.

3.6.2.- Ejemplos geométricos.

Como ejemplos geométricos de transformaciones, en el plano $\mathbb{R}^2$, definidas por matrices cabe destacar los giros y las homotecias (con centro el origen de coordenadas) y las proyecciones y simetrías respecto a rectas que pasan por el origen de coordenadas.

Sabiendo que una transformación está definida mediante una matriz, el cálculo de la matriz puede hacerse teniendo en cuenta cómo se transforman los vectores canónicos. La elección de dichos vectores no es única aunque si lo sea la matriz que se busca y en ocasiones interesa transformar vectores distintos a los canónicos para llegar a dicha matriz buscada. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos.

(1) Consideremos un giro de centro el origen de coordenadas y ángulo φ (en el sentido positivo). Para determinar la matriz asociada basta con obtener los transformados de los vectores canónicos

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to T(e_1) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \mathrm{sen}(\varphi) \end{bmatrix}, \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to T(e_2) = \begin{bmatrix} -\mathrm{sen}(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{bmatrix}.$$

Por tanto la matriz del giro es, como ya sabíamos,

$$G_\varphi = G_\varphi I = G_\varphi \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\mathrm{sen}(\varphi) \\ \mathrm{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}.$$

(2) La transformación que asigna a cada vector de $\mathbb{R}^3$ su proyección ortogonal sobre un plano que pasa por el origen de coordenadas, por ejemplo $\pi \equiv x+y+z=0$, es una transformación determinada por una matriz (real, 3×3). Para determinar la matriz basta con obtener la proyección ortogonal sobre dicho plano de cada uno de los vectores canónicos.

(3) Para la misma transformación anterior (proyección ortogonal sobre un plano que pasa por el origen de coordenadas), podemos obtener la matriz asociada M teniendo en cuenta cuál es el resultado de multiplicar esta matriz por determinados vectores (de $\mathbb{R}^3$). Consideremos un vector $\vec{n}$ ortogonal al plano dado, en el caso anterior podemos tomar $\vec{n}=[1,\ 1,\ 1]^t$, y dos vectores $\{v_1, v_2\}$ que generen el plano, por ejemplo, $\left\{v_1=[1,\ -1,\ 0]^t, v_2=[1,\ 0,\ -1]^t\right\}$. Puesto que el transformado de $\vec{n}$ es el vector nulo y los transformados de v_1 y v_2 son ellos mismos, la matriz M debe verificar

$$M\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Basta despejar M multiplicando a la derecha, en ambos miembros de la igualdad anterior, por la inversa de la matriz P,

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Tenemos

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

En lugar de utilizar los vectores v_1, v_2 y $\vec{n}$ podríamos haber considerado tres vectores $\{u_1, u_2, u_3\}$ linealmente independientes. Calculando sus transformados $T(u_1), T(u_2)$ y $T(u_3)$ podrímos obtener M de forma análoga a la que hemos descrito. Las expresiones y cálculos intermedios serían distintos pero la matriz final coincidiría con la calculada.

(4) Sabiendo que una transformación matricial, $T(x)=Ax$, hace las siguientes transformaciones de vectores

$$u_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow Au_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } u_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow Au_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

podemos determinar la matriz A sin más que plantear la ecuación matricial

$$A\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y **despejar** A.

A la hora de determinar una matriz $A, m \times n$, a partir de la transformación, mediante A, de ciertos vectores necesitaremos n vectores (de $\mathbb{K}^n$) tales que al considerar la matriz cuadrada que tiene a dichos vectores como columnas obtengamos una matriz que tiene inversa y podamos despejar A de la ecuación matricial planteada,

$$A \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Au_1 & Au_2 & \cdots & Au_n \end{bmatrix} \Longrightarrow A = \cdots$$

3.7.- Ejercicios.

3.7.1.- Enunciados.

Ejercicio 1. De las matrices $A_{m\times n}$ y $B_{n\times p}$ se sabe que ninguna de las columnas de B es nula pero que, sin embargo, la matriz AB tiene una columna nula. ¿Qué puede asegurarse de las columnas de A?

Ejercicio 2. Suponiendo que las dimensiones de las matrices son coherentes (permiten hacer las operaciones indicadas) despeja la matriz X de las siguientes ecuaciones matriciales dando las condiciones bajo las cuales es posible:

$$(\mathbf{a})\ AX = BX,\ \ (\mathbf{b})\ AXB + C = D,\ \ (\mathbf{c})\ X^2 = X.$$

Ejercicio 3. Resuelve los siguientes sistemas:

$$(\mathbf{1})\left\{\begin{array}{rcl} x_1+\ x_2+\ x_3 & = & 3\\ 2x_1+3x_2+\ x_3 & = & 6\\ x_1+5x_2+2x_3 & = & 8\end{array}\right\},(\mathbf{2})\left\{\begin{array}{rcl} x_1+2x_2+x_3 & = & 5\\ 2x_1+4x_2-x_3 & = & 7\\ x_1-\ x_2\qquad & = & 1\end{array}\right\},(\mathbf{3})\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1+x_2+\ x_3 & = & 1\\ x_1-x_2+2x_3 & = & -1\\ x_1+x_2+3x_3 & = & 1\end{array}\right\}.$$

Ejercicio 4. Resuelve los siguientes sistemas y expresa la solución en forma vectorial paramétrica:

$$(\mathbf{1})\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+2x_3+2x_4 & = & 0\\ x_1+x_2-3x_3-3x_4 & = & 0\\ x_1+x_2+4x_3+4x_4 & = & 0\\ x_1+x_2+5x_3+5x_4 & = & 0\end{array}\right\},\qquad (\mathbf{2})\left\{\begin{array}{rcl} x_1+2x_2+\ x_3\qquad & = & 3\\ 2x_1+4x_2+3x_3+x_4 & = & 9\\ -x_1-2x_2+\ x_3+x_4 & = & 2\end{array}\right\}.$$

Ejercicio 5. Discute los siguientes sistemas según los valores de los parámetros:

$$(\mathbf{1})\left\{\begin{array}{rcl} ax+y+z+u & = & a\\ x+ay+z+u & = & a\\ x+y+az+u & = & a\\ x+y+z+au & = & a\end{array}\right\},\qquad (\mathbf{2})\left\{\begin{array}{rcl} ax+y+z & = & a\\ x+ay-z & = & 1\\ 3x+y+bz & = & 2\\ x-y-z & = & 1\end{array}\right\}.$$

Ejercicio 6. Sean

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & -2 & 2\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix} 1\\ 2\alpha\\ \beta-2\alpha\end{bmatrix}\quad \text{y}\quad x=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}.$$

(a) Calcula los valores de α y β para los que el sistema $Ax = b$ es compatible.

(b) Con $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, halla la solución (o soluciones) de $Ax = b$ que verifican $x_2 = 0$ y $x_1 - x_3 + x_4 = 0$.

Ejercicio 7. Consideremos un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b = \begin{bmatrix} 4\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$ y supongamos que tenemos dos soluciones $u = \begin{bmatrix} 1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} -1\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$ del sistema dado. **Calcula, cuando sea posible:**

(a) Otras dos soluciones del sistema de ecuaciones dado $Ax = b$.

(b) Dos soluciones del sistema homogéneo asociado $Ax = 0$.

(c) Una solución del sistema $A_1x = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ siendo A_1 la matriz que se obtiene de A al intercambiar sus columnas 1 y 2.

(d) Una solución del sistema $A_2x = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ siendo A_2 la matriz que se obtiene de A al multiplicar su primera columna por 3.

(e) Una solución del sistema $Ax = 5b$.

(f) Una solución del sistema homogéneo $\tilde{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. siendo $\tilde{A}$ la matriz que se obtiene al añadirle a la matriz A el vector columna $b = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ como cuarto vector columna.

Ejercicio 8. Determina todas las matrices cuadradas A de orden 2 tales que:

$$A \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} A, \qquad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R},\ a \neq b.$$

Ejercicio 9. Consideremos el sistema siguiente

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & a & 1 \\ b & 4 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ b-4 \end{bmatrix}.$$

Determina las condiciones a satisfacer por a y b para que dicho sistema sea, respectivamente, **(a)** incompatible, **(b)** compatible determinado, **(c)** compatible indeterminado.

Ejercicio 10. ¿Para qué valores de a y b se verifica que el vector $(0, a, b, 1)$ pertenece a

$$\text{Gen}\{(1,2,3,4), (1,0,3,1)\}?$$

Ejercicio 11. **(1)** ¿Para qué vectores $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ es compatible el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 \qquad + x_4 & = & b_1 \\ 2x_1 \qquad + 3x_3 + x_4 & = & b_2 \\ 2x_2 + x_3 \qquad & = & b_3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 \qquad & = & b_4 \end{array} \right\} ?$$

(2) Describe mediante una ecuación los vectores $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ que pertenecen a

$$\text{Gen}\{(1,2,0,1),(1,0,2,1),(0,3,1,4),(1,1,0,0)\}.$$

Ejercicio 12. Calcula vectores tales que el subespacio generado por ellos coincida con el conjunto solución del sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x_1 \qquad +x_3-x_4+2x_5 & = & 0 \\ -x_1+2x_2 \qquad +x_4 \qquad & = & 0 \\ -x_1+2x_2+x_3 \qquad +2x_5 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Ejercicio 13. Calcula la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 2 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 14.

(1) Determina, si existen, dos sistemas de ecuaciones lineales cuyo conjunto-solución sea el conjunto de los vectores de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\beta \\ \alpha-\beta \\ -1+2\alpha+2\beta \\ 1+3\alpha+\beta \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(2) Determina, si existen, dos sistemas de ecuaciones lineales cuyo conjunto-solución sea el conjunto de los vectores de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(3) Considera los conjuntos S_1 y S_2 de vectores de $\mathbb{R}^2$ definidos respectivamente por

$$S_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1-2\alpha \\ x_2 = -2+\alpha^2 \end{array} \right\}, (\alpha \in \mathbb{R}); \quad S_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1-2\ln\beta \\ x_2 = -2+\ln\beta \end{array} \right\}, (\beta > 0).$$

¿Es S_1 el conjunto-solución de algún sistema de ecuaciones lineales? ¿Por qué? ¿Lo es S_2? ¿Por qué?

Ejercicio 15. Sea A una matriz $n \times n$ y supongamos que $\det(A) = -3$, calcula el determinante de las siguientes matrices:

(a) $A^T, 2A, 2A^{-1}, (2A)^{-1}, 2A^3, A^4, AA^T$.

(b) La matriz que se obtiene de A al multiplicarla por la izquierda por la matriz diagonal cuyos elementos diagonales son $(1, 2, \ldots, n)$.

Ejercicio 16. Sea A una matriz 6×6. Calcula el determinante de la matriz B, 7×7, que se obtiene al intercalar entre las filas 4 y 5 de A la fila $(0, 0, 2, 0, 0, 0, 0)$ y entre las columnas 2 y 3 de A la columna $(-3, 1, 0, -1, 2, 5, 3)$, es decir, A se obtiene de B suprimiendo la fila y la columna indicada (en las posiciones correspondientes).

Ejercicio 17. **(1)** Sea M la matriz $n \times n$ cuyas entradas son los números $1, 2, \ldots, n^2$ ordenados por filas, de izquierda a derecha y de arriba abajo. Calcula el determinante de M segń los valores de $n \in \mathbb{N}$.

(2) Sea $a_1, a_2, \ldots$ una progresión aritmética y sea A_n la matriz cuadrada, $n \times n$, cuyas entradas son $a_{ij} = a_{i+j-1}, 1 \leq i, j \leq n$. Calcula el determinante de A_n según los valores de $n \in \mathbb{N}$.

(3) Sea $b_1, b_2, \ldots$ una progresión geométrica y sea B_n la matriz cuadrada, $n \times n$, cuyas entradas son $b_{ij} = a_{i+j-1}, 1 \leq i, j \leq n$. Calcula el determinante de B_n según los valores de $n \in \mathbb{N}$.

Recuérdese que:

(a) Se dice que $a_1, a_2, \ldots$ es una progresión aritmética (de diferencia d) si la diferencia entre dos términos consecutivos es constante (igual a d). Es decir si

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = d.$$

En este caso, tenemos que

$$a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d, \cdots, a_k = a_1 + (k-1)d, \cdots$$

(b) Se dice que $b_1, b_2, \ldots$ es una progresión geométrica (de razón $r \neq 0$) si el cociente entre dos términos consecutivos es constante (igual a r). Es decir si

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \cdots = r.$$

En este caso, tenemos que

$$b_2 = b_1 r, b_3 = b_1 r^2, \cdots, b_k = b_1 r^{k-1}, \cdots$$

Ejercicio 18. Estudia si es lineal la transformación $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 19. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 - x_1 \\ x_1 - x_2 - x_3 \end{bmatrix}.$$

Se pide:

(a) Comprobar que T es una transformación lineal. **(b)** Hallar la matriz A asociada a T.

Ejercicio 20. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal que verifica

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \; T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Se pide:

(a) Hallar la matriz A que representa a T. **(b)** Calcular $\ker T$.

Ejercicio 21. Determina la matriz de cada una de las siguientes transformaciones:

(1) Proyección ortogonal sobre la recta $2x - 3y = 0$.

(2) Simetría respecto de la recta $2x - 3y = 0$.

(3) Proyección sobre la recta $2x - 3y = 0$ en la dirección de la recta $x + y = 0$.

(4) Proyección ortogonal sobre la recta $\left\{ \begin{array}{c} 2x - 3y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right\}$.

(5) Simetría respecto de la recta del apartado anterior.

(6) Proyección ortogonal sobre el plano $2x - 3y + z = 0$.

(7) Simetría respecto al plano $2x - 3y + z = 0$.

(8) Proyección sobre la recta $\left\{ \begin{array}{c} 2x - 3y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right\}$ según el plano $x + y - z = 0$.

(9) Proyección sobre el plano $2x - 3y + z = 0$ según el vector $u = [1 \; 2 \; -1]$.

Ejercicio 22. Calcula la matriz de la simetría respecto a un plano (que pasa por el origen de coordenadas) sabiendo que transforma el vector $u = [1, 2, 2]^t$ en un múltiplo positivo de $e_1 = [1, 0, 0]^t$.

Ejercicio 23. Describe cómo se transforman:

(a) los vectores canónicos, **(b)** el cuadrado unidad y **(c)** el rectángulo $[2, 4] \times [1, 2]$

mediante las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \\ & -2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{bmatrix}, \; AB \;\; \text{y} \;\; BA.$$

3.7.2.- Soluciones.

Ejercicio 1. Si una columna de AB es nula, la matriz A por la correspondiente columna de B es nula, y esto es equivalente a que una combinación lineal de las columnas de A (la combinación lineal cuyos coeficientes son los elementos de la columna de B considerada). Puesto que ninguna columna de B es nula, en la combinación lineal considerada aparece algún coeficiente no nulo y, por tanto, alguna columna de A se puede expresar como combinación lineal de las restantes. De forma equivalente, el sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene alguna solución no trivial (es un sistema compatible indetermnado).

Ejercicio 2. (a) Si $A - B$ es cuadrada y $\exists(A - B)^{-1}$,

$$AX = BX \Longrightarrow X = 0.$$

(b) Si A y B son cuadradas y $\exists A^{-1}$ y $\exists B^{-1}$,

$$AXB + C = D \Longleftrightarrow X = A^{-1}(D - C)B^{-1}.$$

(c) Si X es cuadrada y ($\exists X^{-1}$ ó $\exists(X - I)^{-1}$),

$$X^2 = X \Longleftrightarrow X = 0 \text{ ó } X = I$$

Ejercicio 3. (1)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{array} \right\}.$$

(2)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{array} \right\}.$$

(3)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

Ejercicio 4. (1)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(2)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \forall \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 5. (1)

Si	el sistema es
$a \neq 1$ y $a \neq -3$	compatible determinado
$a = -3$	incompatible
$a = 1$	compatible indeterminado

(2) Si $a \neq -1$, sistema incompatible $\forall\ b$. Si $a = -1$, sistema compatible indeterminado $\forall\ b$.

Ejercicio 6. (a) El sistema es compatible si y solo si $\beta = 1$ (independientemente de α).

(b) Para $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ el sistema es compatible según lo obtenido en **(a)**.

Con las condiciones/ecuaciones adicionales tenemos que la solución es única y viene dada por

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7. (a) Basta considerar cualquier pareja de escalares α y β que verifiquen $\alpha + \beta = 1$ para que $\alpha u + \beta v$ sea tambin solucin.

(b) Para cualquier escalar α $\alpha u - \alpha v$ es solucin del homogéneo.

(c) Al multiplicar una matriz A por un vector $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ se obtiene una combinación lineal de las columnas de A. En dicha combinación lineal los coeficientes respectivos son x_1, x_2 y x_3. Si hacemos un intercambio en las columnas de A basta hacer el correspondientes intercambio entre los coeficientes para obtener el mismo resultado. Por tanto

$$A_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = b \text{ y } A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = b.$$

(d) Siguiendo un planteamiento similar al de (c) tenemos que $A_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = A_2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = b.$

(e) $A(5u) = 5Au = 5b$.

(f) Siguiendo un planteamiento similar al de los apartados (c) y (d) la igualdad vectorial que se obtiene de $Au = b$ se puede reescribir como

$$\tilde{A}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por otra parte si tenemos una solución $(x_1, x_2, x_3)^T$ del sistema homogéneo $Ax = 0$, también tenemos

$$\left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 8. Las matrices A que conmutan con las matrices $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $a \neq b$, son todas las matrices diagonales

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}, \ x_1, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Observación: Cualquier matriz $A, 2 \times 2$, conmuta con cualquier matriz que sea múltiplo de la matriz identidad,

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9. Se obtiene la siguiente clasificación:

Si	el sistema es
$a \neq 1$ y $b \neq 4$	incompatible
$a = 1$ y $b \neq 4$ ó $a \neq 1$ y $b = 4$	compatible determinado
$a = 1$ y $b = 4$	compatible indeterminado

Ejercicio 10. Para $a = \frac{2}{3}$ y $b = 0$.

Ejercicio 11. **(1)** El sistema es compatible si y sólo si las coordenadas del vector b verifican que $b_1 - b_2 - b_3 + b_4 = 0$.

(2) Este apartado tiene la misma respuesta que el anterior.

Ejercicio 12. Las soluciones del sistema dado son

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Puesto que el conjunto-solución del sistema dado es el formado por todas las combinaciones lineales consideradas en la igualdad anterior, dicho conjunto solución es

$$\text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ejercicio 13. La matriz inversa de A es la matriz $B = A^{-1} = [b_{ij}]$ dada por

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i < j, \\ (-2)^{i-j} & \text{si} \quad i \geq j, \end{cases} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -2 & 1 & & & \\ 4 & -2 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ (-2)^{n-1} & \dots & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 14.

(1) Por ejemplo,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 5 \\ 4x_1 + 3x_2 \quad - x_4 & = & 3 \end{array} \right\} \text{ y } \left\{ \begin{array}{rcl} 4x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 5 \\ x_2 + x_3 - x_4 & = & -2 \end{array} \right\}.$$

(2) Por ejemplo, los sistemas homogéneos asociados a los sistemas anteriores,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 0 \\ 4x_1 + 3x_2 \quad - x_4 & = & 0 \end{array} \right\} \text{ y } \left\{ \begin{array}{rcl} 4x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \end{array} \right\}.$$

(3) S_1: Los puntos de S_1 son los puntos de una parábola. Eliminando el parámetro es fácil obtener su ecuación implícita $x_2 + 2 = \frac{1}{4}(x_1 - 1)^2$. Obviamente S_1 no puede ser el conjunto solución de una ecuación lineal o de un sistema de ecuaciones lineales. Es fácil comprobar que si tenemos dos puntos distintos (x_1, x_2) y (x_1', x_2') de S_1 entonces en la recta que une dichos puntos hay puntos que no están en S_1.

S_2: Eliminando el parámetro tenemos $\dfrac{x_1 - 1}{-2} = \dfrac{x_2 + 2}{1}$. Por tanto todos los puntos de S_2 pertenecen a la recta definida por la ecuación anterior. Y viceversa, puesto que $\ln(\beta)$ recorre todo $\mathbb{R}$ cuando β recorre el intervalo $(0, +\infty)$, cualquier punto de la recta es un punto de S_2. Por tanto, S_2 es el conjunto solución de la ecuación lineal $x_1 + 2x_2 = -3$.

Ejercicio 15. **(a)**

$\det(A^T) = \det(A)$	$\det(2A) = 2^n \det(A)$	$\det(2A^{-1}) = \dfrac{2^n}{\det(A)}$
$\det((2A)^{-1}) = \dfrac{1}{2^n \det(A)}$	$\det(2A^3) = 2^n \det(A)^3$	$\det(A^4) = \det(A)^4$
$\det(AA^T) = \det(A)^2$		

(b) $(n!)\det(A)$.

Ejercicio 16.

$$\det(B) = (-1)^{3+5} 2\det(A).$$

Ejercicio 17. **(1)** Para $n = 2, \det(M) = -2$ y para $n \geq 3, \det(M) = 0$.

(2) Para $n = 2, \det(A_2) = -2d^2$ y para $n \geq 3, \det(A_n) = 0$.

(3) Para $n \geq 2, \det(B_n) = 0$.

Ejercicio 18. Sí.

Ejercicio 19. **(a)** Si $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ son vectores cualesquiera, se verifica que

$$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \alpha_3 T(u_3),$$

para cualesquiera $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Por tanto, es una transformación lineal.

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 20. **(a)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. **(b)** $\ker T = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$.

Ejercicio 21. **(1)** La matriz de la proyección es

$$P = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

(2) La matriz de la simetría viene dada por

$$S = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{bmatrix}.$$

(3) La matriz de esta proyección es

$$P = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(4) La proyección ortogonal sobre la recta es

$$P = \frac{1}{42}\begin{bmatrix} 16 & 4 & -20 \\ 4 & 1 & -5 \\ -20 & -5 & 25 \end{bmatrix}.$$

(5) La simetría respecto de la recta del apartado anterior queda

$$S = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} -5 & 4 & -20 \\ 4 & -20 & -5 \\ -20 & -5 & 4 \end{bmatrix}.$$

(6) La proyección ortogonal sobre el correspondiente plano es

$$P = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 10 & 6 & -2 \\ 6 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 13 \end{bmatrix}.$$

(7) La simetría respecto al mismo plano queda

$$A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

(8) Proyección sobre la recta según un plano

$$P = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

(9) Proyección sobre el plano según cierto vector

$$P = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

. . . .

Las matrices que se obtienen en todos los apartados de este ejercicio tienen algunas características comunes entre sí. Consideremos una recta o plano (que pase por el origen de coordenadas), la matriz P de una proyección sobre dicha recta o plano (proyección ortogonal o no) y la matriz S de la simetría correspondiente. Las matrices P y S verifican:

- $P^2 = P$, puesto que para cualquier vector x, $PPx = Px$ (el proyectado del proyectado de x es igual al primer proyectado que se obtiene).
- $S^2 = I$, puesto que para cualquier vector x, $SSx = x$ (el simétrico del simétrico de x es x).
- $P = \frac{1}{2}(S + I)$.

Ejercicio 22. Denotemos por $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la simetría descrita y por A la matriz asociada (S es una transformación lineal).

El plano que define la simetría tiene que ser el plano que

- pasa por el origen de coordenadas y
- un vector normal al plano es $\vec{n} = S(u) - u = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Por tanto, el plano considerado tiene por ecuación $x - y - z = 0$.

La matriz A de la simetría considerada es

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 23. Sean e_1 y e_2 los vectores canónicos de $\mathbb{R}^2$ y consideremos la transformación 1 $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por una matriz real $M, 2 \times 2$, $T(x) = Mx$.

- Los vectores canónicos se transforman, respectivamente, en los vectores Me_1 y Me_2 que son los dos vectores columna de M.
- El cuadrado unidad (superficie) está formado por los vectores $x \in \mathbb{R}^2$ de la forma $x_1 e_1 + x_2 e_2$ con $0 \leq x_1 \leq 1$ y $0 \leq x_2 \leq 1$. Al transformar estos vectores mediante $T(x) = Mx$ obtenemos los vectores

$$T(x) = Mx = x_1 Me_1 + x_2 Me_2 \text{ con } 0 \leq x_1, x_2 \leq 1.$$

Es decir, es el paralelogramo determinado por los dos vectores columna de M.

- El rectángulo (superficie) $[2,4]\times[1,2]$ está formado por los vectores $x\in\mathbb{R}^2$ de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha e_1 + \beta e_2 \text{ con } 0 \leq \alpha \leq 2 \text{ y } 0 \leq \beta \leq 1.$$

  Al transformar estos vectores mediante $T(x) = Mx$ obtenemos los vectores

$$T(x) = Mx = M \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha M e_1 + \beta M e_2 \text{ con } 0 \leq \alpha \leq 2, 0 \leq \beta \leq 1.$$

  Es decir, es la traslación, según el vector $M \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ del paralelogramo (con uno de sus vértices en el origen de coordenadas) determinado por el ectores $2Me_1$ (primer vector columna de M multiplicado por 2) y Me_2 (segundo vector columna de M).

. . . .

A: **(a)** Vectores columna de A.

(b) Rectángulo $[3,0]\times[0,-2]$.

(c) Rectángulo $[6,12]\times[-4,-2]$.

B: **(a)** Vectores columna de B.

(b) Paralelogramo ... (uno de los vértices es el origen).

(c) Paralelogramo ... (uno de los vértices es $(6,-2)$).

AB: **(a)** Vectores columna de AB.

(b) Paralelogramo ... (uno de los vértices es el origen).

(c) Paralelogramo ... (uno de los vértices es ...).

BA: **(a)** Vectores columna de BA.

(b) Paralelogramo ... (uno de los vértices es el origen).

(c) Paralelogramo ... (uno de los vértices es ...).